TERMINALE SPÉCIALITÉ

Méthode de résolution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et second membre constant

Contexte :

Comme nous l'avons vu, la mise en relation du premier principe de la thermodynamique et de la loi phénoménologique de Newton mène à l'équation suivante pour la température $T(t)$ d'un système incompressible de température initiale T_0 en contact avec le milieu extérieur de température constante T_{ext} :

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{\tau} = \frac{T_{\text{ext}}}{\tau}} \text{ où } \tau = \frac{m \times c}{h \times S}$$

L'objectif est de trouver l'expression de la **fonction** $T(t)$ afin de connaître l'évolution de la température du système au cours du temps.

Un peu de vocabulaire :

Cette équation a donc pour inconnue la fonction $T(t)$, elle fait intervenir la fonction $T(t)$ elle-même et sa première dérivée $\dfrac{dT}{dt}$. Cela en fait une **équation différentielle**.

En outre, les coefficients figurant devant la dérivée et devant la fonction $T(t)$ sont constants ainsi que le second membre $\dfrac{T_{\text{ext}}}{\tau}$. On dira alors que l'équation différentielle est **à coefficients constants et à second membre constant**.

L'équation différentielle ne faisant pas intervenir des puissances de la fonction $T(t)$, ni de sa dérivée $\dfrac{dT}{dt}$, on dit que cette équation différentielle est **linéaire**.

Méthode de résolution :

1. **Résoudre l'équation différentielle sans second membre**

   Il s'agit de résoudre l'équation $\frac{dT}{dt}+\frac{T(t)}{\tau}=0$ soit $\frac{dT}{dt}=-\frac{T(t)}{\tau}$ ou encore $\frac{dT}{dt}=-\frac{1}{\tau}\times T(t)$

   La solution générale de cette équation est de la forme $\boxed{T(t)=A\times e^{-\frac{t}{\tau}}}$ où A est une constante à déterminer plus tard.

2. **Trouver une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre**

   Bien souvent, la solution particulière ressemble au second membre de l'équation différentielle. Ainsi, dans notre cas, le second membre étant une constante, on peut essayer de proposer comme solution particulière de l'équation différentielle avec second membre la fonction $T(t)=K$ où K est une constante.

   Dans ce cas, on aurait $\frac{dT}{dt}=0$ car la dérivée d'une constante est nulle. L'équation différentielle devient alors $\frac{T(t)}{\tau}=\frac{T_{\text{ext}}}{\tau}$, autrement dit, avec notre solution particulière, $\frac{K}{\tau}=\frac{T_{\text{ext}}}{\tau}$. On en déduit que la fonction constante $T=T_{\text{ext}}$ est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

3. **Trouver la forme des solutions de l'équation différentielle**

   Pour obtenir la solution de l'équation différentielle, il suffit de faire **la somme des deux fonctions précédentes**. Ainsi, les solutions sont de la forme $\boxed{T(t)=A\times e^{-\frac{t}{\tau}}+T_{\text{ext}}}$.

4. **Déterminer la ou les constantes**

   Les constantes introduites lors de la résolution mathématique indiquent qu'il existe mathématiquement une infinité de fonctions solutions de l'équation différentielle. Toutefois, une seule fonction correspond à la situation physique réelle étudiée.

   On détermine les constantes grâce aux **conditions aux limites** (condition initiale et condition finale par exemple).

   Ici, par exemple, nous devons nous assurer que $T(t=0)=T_0$, la température initiale du système :

   $T(t=0)=A\times e^{-\frac{0}{\tau}}+T_{\text{ext}}=A+T_{\text{ext}}$ d'où le fait que $T_0=A+T_{\text{ext}}$, soit $A=T_0-T_{\text{ext}}$.

5. **Donner la solution de l'équation différentielle**

   Pour conclure, on a démontré que la température du système est une fonction du temps telle que : $\boxed{T(t)=(T_0-T_{\text{ext}})\times e^{-\frac{t}{\tau}}+T_{\text{ext}}}$