THÈME 4

ONDES ET SIGNAUX

Pierre-André LABOLLE

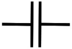
Lycée International des Pontonniers de Strasbourg

Octobre 2021

CHAPITRE 4.4 : Dynamique d'un système électrique capacitif

I. Le condensateur

1. Constitution

- Il s'agit d'un composant électronique constitué de deux conducteurs métalliques, appelés armatures, séparés par un matériau isolant, appelé diélectrique.
- On le symbolise de la façon suivante : 
- Un condensateur est caractérisé par sa **capacité** C exprimée en **farads**, unité de symbole F.
- Les capacités des condensateurs usuels sont de faible valeur et on utilise souvent les sous-multiples du farad comme le millifarad (mF), le microfarad (μF), le nanofarad (nF) et le picofarad (pF).

I. Le condensateur

2. Quelques exemples d'application de systèmes capacitifs

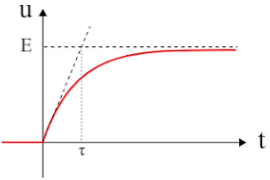
- Certains écrans tactiles dont le principe de fonctionnement est basé sur des transferts de charges électriques ;
- Minuterie pour l'éclairage d'une cage d'escalier ;
- Modélisation de la répartition des charges électriques dans un nuage d'orage ;
- Accéléromètres ;
- Jauges de niveau ;
- Certains types de microphones ;
- Mémoire vive d'ordinateur (DRAM) ;
- Filtres électroniques utilisés notamment le traitement du signal audio ;
- Système électronique de déclenchement des airbags...

I. Le condensateur

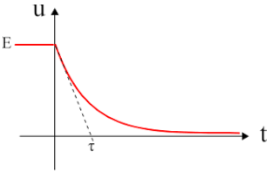
3. Étude qualitative de la charge et de la décharge d'un condensateur

- Animation présentant le comportement d'un condensateur dans un circuit dit "circuit RC" : `https://sciencesphysiques.pagesperso-orange.fr/ts_charge_et_decharge_rc.swf`

- Charge du condensateur : la tension aux bornes du condensateur augmente jusqu'à égaler celle du générateur.



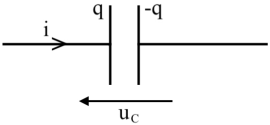
- Décharge du condensateur : la tension aux bornes du condensateur diminue jusqu'à s'annuler.



I. Le condensateur

4. Grandeurs électriques associées

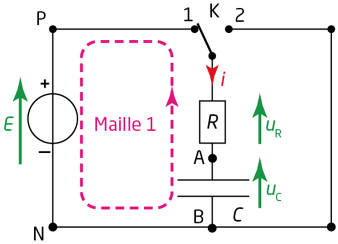
- La charge électrique portée par le condensateur est appelée q ; elle s'exprime en coulombs de symbole C.
- Cette charge électrique q est proportionnelle à la tension électrique u_C aux bornes du condensateur ; le coefficient de proportionnalité est appelé **capacité** du condensateur. De cette manière, nous avons, à chaque instant, la relation $\boxed{q = C \times u_C}$
- L'intensité i du courant dans le circuit correspond au **débit des charges électriques** dans le circuit, autrement dit, à la charge électrique qui circule dans le circuit par unité de temps. En régime variable, on a donc $\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$
- Autrement dit, l'intensité du courant électrique est égale à la dérivée de la charge électrique par rapport au temps.
- Ainsi, durant la charge du condensateur, $i > 0$ car q augmente alors que durant la décharge, $i < 0$ car q diminue.
- Pour appliquer avec rigueur les lois de l'électricité dans les circuits (loi des mailles notamment), on retiendra la convention de notation suivante :



II. Étude de la charge du condensateur

1. Mise en équation

- On considère le circuit suivant dans lequel le condensateur est initialement déchargé et dans lequel on bascule, à la date $t = 0$ l'interrupteur K sur la position 1.



- D'après la loi des mailles dans la maille numérotée 1 sur le schéma, on obtient : $u_C + u_R - E = 0$

- Or d'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$ et nous avons vu que $i = \dfrac{dq}{dt}$ d'où $u_R = R \times \dfrac{dq}{dt}$

- Nous avons aussi vu que $q = C \times u_C$ où C est une constante (la capacité du condensateur). Ainsi, $\dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$

II. Étude de la charge du condensateur

1. Mise en équation

- La loi des mailles appliquée dans la maille 1 devient alors l'équation suivante :

  $u_C + R \times C \times \dfrac{du_C}{dt} - E = 0$ ce qui peut encore s'écrire de la façon suivante :

  $$\boxed{u_C + R \times C \times \frac{du_C}{dt} = E} \quad (1)$$

- On retrouve ici une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et second membre constant pour la tension u_C aux bornes du condensateur.

- La résolution de cette équation différentielle se mènera de la même manière que ce que nous avons vu en thermodynamique.

II. Étude de la charge du condensateur

2. Résolution analytique

- D'après ce que nous avons déjà vu, les solutions de cette équation sont de la forme $\boxed{u_C = A + B \times e^{-\frac{t}{\tau}}}$ où A, B et τ sont des constantes à déterminer.

① Cette fonction u_C doit vérifier l'équation (1). Or $\dfrac{du_C}{dt} = -\dfrac{B}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ainsi, en reportant dans l'équation (1), on obtient :

$$u_C + R \times C \times \frac{du_C}{dt} = E$$

$$\left(A + B \times e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + R \times C \times \left(-\frac{B}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E$$

$$A + B \times \left(1 - \frac{R \times C}{\tau}\right) \times e^{-\frac{t}{\tau}} = E \qquad (2)$$

Cette relation doit être vraie quelle que soit la date t considérée. Or A et E étant des constantes, le terme dépendant du temps doit être nul. Par ailleurs, $B \neq 0$ car sinon, la tension aux bornes du condensateur serait constante, ce qui n'est pas le cas. En outre, la fonction exponentielle ne s'annule jamais.

La seule possibilité est donc $\left(1 - \dfrac{R \times C}{\tau}\right) = 0$ soit $\boxed{\tau = R \times C}$

Par conséquent, l'équation (2) devient $A = E$

II. Étude de la charge du condensateur

2. Résolution analytique

2. D'après ce qui précède, nous avons donc $u_C = E + B \times e^{-\frac{t}{RC}}$

   De plus, à l'instant initial $t = 0$, le condensateur est déchargé donc la tension aux bornes du condensateur est nulle à cette date, soit $u_C(t = 0) = 0$

   On obtient alors $E + B \times e^{-\frac{0}{RC}} = 0$ soit $E + B = 0$ d'où $B = -E$

3. Pour conclure, on obtient donc $u_C = E - E \times e^{-\frac{t}{\tau}}$ et en factorisant, il vient $\boxed{u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ où $\boxed{\tau = RC}$

II. Étude de la charge du condensateur

3. Analyse dimensionnelle du produit RC

- Pour cette analyse dimensionnelle, nous allons utiliser deux dimensions que sont la tension électrique U et l'intensité du courant I.

  D'après la loi d'Ohm, nous savons que $u_R = R \times i$ d'où $[u_R] = [R] \times [i]$. On a donc $[R] = \dfrac{U}{I}$

- Par ailleurs, nous savons que $i = \dfrac{dq}{dt}$ d'où $[i] = \dfrac{[q]}{[t]}$. On a donc $I = \dfrac{[q]}{T}$ ou encore $[q] = I \times T$

  Nous savons aussi que $q = C \times u_C$ d'où $[q] = [C] \times [u_C]$ soit $[q] = [C] \times U$ ou encore $[C] = \dfrac{[q]}{U}$

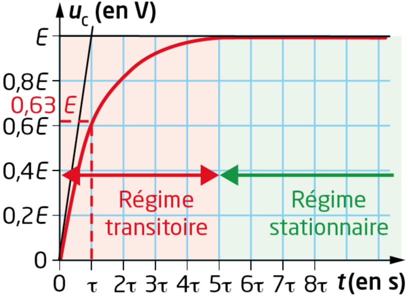
- D'après ce qui précède, nous avons donc $[C] = \dfrac{I \times T}{U}$

  Enfin, il vient $[RC] = \dfrac{\cancel{U}}{\cancel{I}} \times \dfrac{\cancel{I} \times T}{\cancel{U}} = T$

II. Étude de la charge du condensateur

3. Analyse dimensionnelle du produit RC

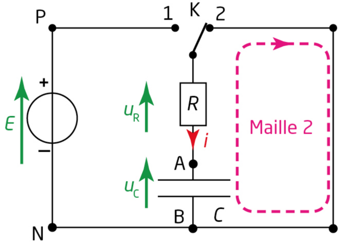
- Le produit RC a donc la dimension d'une durée. Il s'agit de la durée caractéristique de l'évolution temporelle du circuit lors de la charge du condensateur.
- **On appelle <u>constante de temps du dipôle RC</u> la grandeur** $\boxed{\tau = RC}$
- Après une durée égale à $5 \times \tau$, le condensateur est chargé à 99%
- On peut donc considérer que la charge du condensateur est terminée au bout d'une durée de $5 \times \tau$
- Cette constante de temps peut se déterminer graphiquement de deux manières différentes :



III. Étude de la décharge du condensateur

1. Mise en équation

- On considère le circuit suivant dans lequel le condensateur est initialement chargé sous une tension E et dans lequel on bascule, à la date $t = 0$ l'interrupteur K sur la position 2.



- D'après la loi des mailles dans la maille numérotée 2 sur le schéma, on obtient : $u_C + u_R = 0$

- Comme nous l'avons lors de la charge du condensateur, on a $u_R = R \times \dfrac{dq}{dt}$

- Nous avons aussi vu que $\dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$ donc $u_R = RC \times \dfrac{du_C}{dt}$

III. Étude de la décharge du condensateur

1. Mise en équation

- La loi des mailles appliquée dans la maille 2 devient alors l'équation suivante :

$$\boxed{u_C + R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0}$$

- On retrouve ici une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et sans second membre pour la tension u_C aux bornes du condensateur.

- Cette équation peut aussi s'écrire $u_C = -\tau \times \dfrac{du_C}{dt}$ où $\tau = RC$

II. Étude de la décharge du condensateur

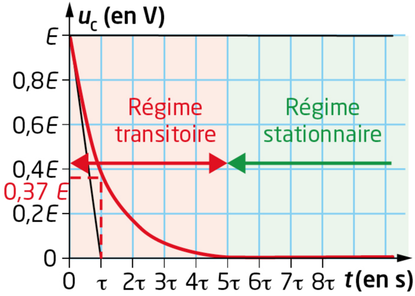
2. Résolution analytique

- Les solutions à l'équation différentielle $u_C = -\tau \times \dfrac{du_C}{dt}$ sont de la forme $u_C = A \times e^{-\frac{t}{\tau}}$ où A est une constante à déterminer.
- Or nous savons par hypothèse que le condensateur est initialement chargé sous la tension E à l'instant initial.
- Or $u_C(t=0) = A \times e^{-\frac{0}{\tau}} = A$
- On en déduit la valeur de la constante $A = E$
- Pour conclure, on obtient l'expression de la tension aux bornes du condensateur $\boxed{u_C = E \times e^{-\frac{t}{\tau}}}$ où $\boxed{\tau = RC}$

II. Étude de la décharge du condensateur

3. Allure de la tension aux bornes du condensateur

- On remarque que la constante de temps lors de la décharge est la même que lors de la charge du condensateur.
- Après une durée égale à $5 \times \tau$, le condensateur est déchargé à 99%
- On peut donc considérer que la décharge du condensateur est terminée au bout d'une durée de $5 \times \tau$
- Cette constante de temps peut se déterminer graphiquement de deux manières différentes :



EXERCICES :

PP491-503 n°21, 39, 40 et 46